

APPUNTI su LEGGE DI FOURIER per classi quarte di liceo scientifico

(a cura di Marco Rizzinelli – agosto 2015)

Prendiamo in esame un conduttore termico lineare lungo “L” e con sezione e coefficiente di conducibilità unitari. Se ai capi di tale conduttore poniamo due valori distinti di temperatura “ $T_1 > T_2$ ” e costanti nel tempo, allora ci troviamo in uno stato stazionario e il **gradiente termico** “ $(T_1 - T_2) / L = \Delta T / L$ ” è la causa della **propagazione di energia in modalità calore** “Q” che attraversa l'intero conduttore nell'intervallo di tempo “ Δt ”.

La legge fenomenologica di Fourier è la seguente, con “ $\lambda / A = 1 \text{ J} \cdot \text{m} / (\text{K} \cdot \text{s})$ ”:

$$\frac{Q}{\Delta t} = - \frac{\lambda}{A} \frac{\Delta T}{L}$$

Facciamo alcune *osservazioni sulla legge* appena scritta:

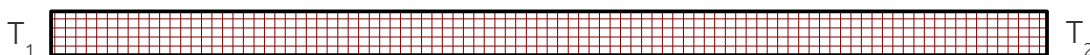
- il segno meno deriva dal **secondo principio** della termodinamica: l'energia spontaneamente si propaga nell'unità di tempo sempre da punto del conduttore a temperatura maggiore, verso punti a temperatura minore, e mai al contrario (enunciato di Clausius);
- se raddoppiamo il gradiente termico significa che possiamo modificare i valori delle temperature oppure la lunghezza del conduttore termico (raddoppiando “ ΔT ” o dimezzando “L”, ad esempio), con il vincolo però di ottenere “ $2 \cdot \Delta T / L$ ”. Raddoppiando la causa possiamo avere due effetti: o la duplicazione dell'energia propagata, oppure il dimezzamento del tempo di propagazione;
- se raddoppiamo la sola differenza di temperatura ai capi del conduttore, possiamo avere un raddoppiamento della quantità di energia o un dimezzamento del tempo di propagazione.
- se raddoppiamo la sola lunghezza del conduttore, possiamo ragionare in questi termini:
 - il tempo affinché si propaghi la stessa quantità di energia deve raddoppiare. Possiamo interpretare allora “ $L / \Delta t$ ” come una *velocità di propagazione dell'energia* lungo tutto il conduttore;
 - il conduttore è soggetto ad una differenza di temperatura identica a prima, ma a causa della sua maggiore lunghezza si ha un dimezzamento dell'energia che fluisce in esso. Perché? Per comprendere questo fenomeno possiamo inizialmente stimare l'energia che si propaga lungo “L” dopo un tempo “ $\Delta t / 2$ ”. Considerando una differenza di temperatura “ $\Delta T / 2$ ” abbiamo una quantità di energia propagata pari al valore “ $Q / 4$ ”. Dopo un ulteriore tempo “ $\Delta t / 2$ ” si propaga lungo un altro “L” una quantità di energia identica, per cui si ha “ $Q / 4 + Q / 4 = Q / 2$ ”;

Grazie a questa legge e al **primo principio** della termodinamica possiamo *definire con più precisione* la grandezza fisica “energia propagata in modalità calore” che si misura in Joule e si indica con la lettera “Q”, spesso abbreviata con il termine “calore”. In tal modo potremo utilizzare con più consapevolezza tale grandezza anche in altre situazioni più complesse, che coinvolgono l'interazione termica. Ecco le seguenti argomentazioni:

- ogni sistema termodinamico esistente, cioè occupante uno spazio di estensione pari a un volume “V”, possiede energia interna “U” e tale energia può cambiare nel tempo tramite una variazione “ ΔU ”. Nel nostro caso il conduttore lineare occupa un determinato volume e ha una determinata energia interna;
- *il calore è una forma di transito dell'energia* (e non una energia in transito!), cioè una delle due modalità di trasporto dell'energia (l'altra è il lavoro “W”, che per noi è nullo). Nella conduzione termica abbiamo *assorbimento* nel “luogo 1” di una quantità *positiva* “ Q_1 ” di energia in modalità calore e *cessione* a distanza “L” nel “luogo 2” di una quantità *negativa* “ Q_2 ” dopo un tempo “ Δt ”. Nel nostro caso il conduttore viene mantenuto in uno stato stazionario e allora abbiamo “ $Q_1 = |Q_2| = Q$ ”;
- in base al principio di conservazione dell'energia abbiamo “ $\Delta U = Q_{\text{tot}} = Q_1 - |Q_2| = 0$ ” che ci permette di considerare un bilancio energetico tra assorbimento e cessione nel corso del tempo. L'energia interna dunque rimane costante.

Attenzione tuttavia a non considerare il conduttore in equilibrio termico, in quanto all'interno di esso *non è definito un unico valore di temperatura*. In questo senso la conduzione termica è un fenomeno che tratta un sistema chiuso – che interagisce con l'ambiente – il quale si trova in uno **stato di non-equilibrio**, seppur stazionario nel tempo. Se volessimo essere rigorosi dovremmo anche dire che l'energia interna stessa del conduttore non è ben definita.

Per ovviare a questo problema si ipotizza che il conduttore sia composto da *infiniti volumetti* che sono *localmente* in equilibrio, *abbastanza piccoli* da considerare l'energia e la temperatura funzioni continue della posizione, ma *abbastanza grandi* affinché ogni volumetto si possa considerare ancora come un sistema termodinamico macroscopico¹. L'energia totale del conduttore, grandezza estensiva e quindi additiva, sarà data dalla somma di tutte le energie locali, mentre la grandezza intensiva temperatura sarà *distribuita nello spazio* con valori in generale differenti. Nel nostro caso la temperatura decresce linearmente lungo tutto il conduttore, da “ T_1 ” fino a “ T_2 ”.



¹ In base alla *teoria cinetica* ogni volumetto deve contenere abbastanza particelle da poter *giustificare* l'utilizzo di grandezze macroscopiche (in particolare la temperatura) per la trattazione del fenomeno fisico a cui è soggetto tale volumetto.

Come possiamo introdurre l'**entropia** del conduttore lineare? Questa grandezza fisica è centrale nella trattazione termodinamica dei processi reali. Sui libri di testo viene fatta la riformulazione storica del secondo principio della termodinamica tramite il lavoro di Clausius con le macchine termiche reversibili e poi di Boltzmann con i gas perfetti molto rarefatti e debolmente interagenti². Per andare dritto al caso del conduttore termico definiamo tale grandezza " S " come una funzione dello stato del sistema (con unità di misura " J / K "), soggetta alla seguente equazione di bilancio (data dalla seconda uguaglianza):

$$\sigma = \frac{\Delta_i S}{\Delta t} = \frac{\Delta S_1}{\Delta t} - \frac{\Delta S_2}{\Delta t} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{Q}{\Delta t} - \frac{1}{T_2} \cdot \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{Q}{\Delta t} \cdot \left(\frac{-\Delta T}{T_1 T_2} \right)$$

Definiamo i termini " $\Delta S_1 / \Delta t$ " e " $\Delta S_2 / \Delta t$ " come le "correnti di entropia" entrante e uscente, mentre il termine " σ " è la **produzione di entropia** " $\Delta_i S$ " nel tempo " Δt ", nell'intero conduttore. Si noti in questo caso che a differenza dell'energia propagata in modalità calore, uguale in entrata tanto quanto in uscita, le correnti di entropia sono differenti in valore in quanto le temperature a cui si trovano gli estremi del conduttore sono diverse. La presenza di un gradiente termico costante nel tempo è dunque la *causa* della produzione di entropia " σ " non nulla. Se ora utilizziamo la legge di Fourier nell'equazione di bilancio dell'entropia abbiamo la possibilità di calcolare la produzione di entropia nell'unità di tempo per il nostro caso di stato stazionario, a partire dalla misura della lunghezza del conduttore e delle temperature ai suoi estremi:

$$\sigma = \frac{\lambda}{A} \frac{\Delta T^2}{L \cdot T_1 T_2} > 0$$

Il fatto che nella conduzione termica si abbia produzione di entropia non nulla è un segnale che tale processo è *irreversibile* e dunque un ottimo esempio per la descrizione³ della *freccia del tempo* (per approfondire si vedano in merito gli altri miei appunti sul blog " frecciadelttempo.altervista.org ").

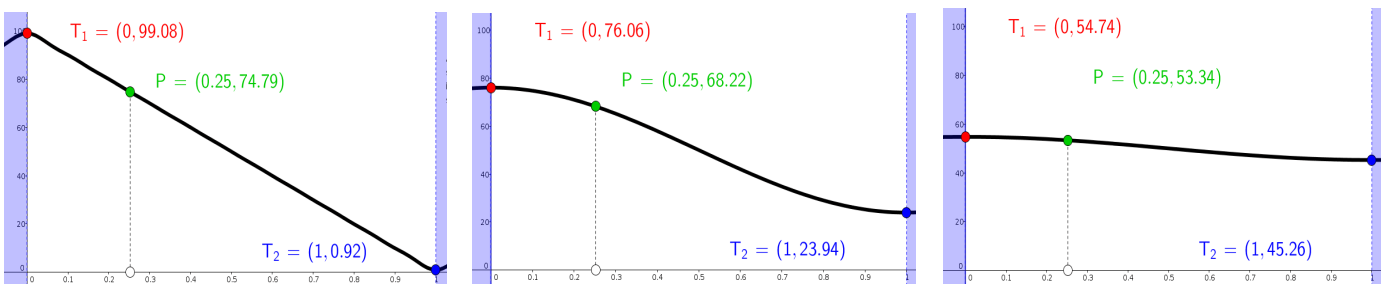
Dal sistema interagente con l'ambiente al sistema isolato: approccio all'equilibrio

Invece di percorrere nuove strade con lo studio dei sistemi aperti⁴ concludiamo dando una spiegazione completa – macroscopica e vincolata alla legge fenomenologica di Fourier – di come un sistema termodinamico raggiunga l'equilibrio. Se ad un certo istante, durante lo stato stazionario, isoliamo il sistema e impediamo all'ambiente di mantenere il gradiente termico che abbiamo descritto, che cosa succede? L'energia continuerà a fluire ma le estremità del conduttore inizieranno a modificare la loro temperatura, gradualmente in un tempo transitorio. L'effetto – flusso di energia – modificherà in un **feedback negativo** la causa – il gradiente termico – fino a che il gradiente si annullerà. In quell'istante di tempo tutto il conduttore avrà la stessa temperatura (la media di quelle agli estremi nello stato stazionario) e si troverà dunque in equilibrio termico.

La **produzione di entropia**, in base alla formula, **diminuirà nel tempo fino ad annullarsi** e il processo irreversibile sarà terminato.

Se non consideriamo le fluttuazioni dall'equilibrio, problema molto complesso la cui causa si deve trovare nel numero finito di particelle che compongono il sistema, allora nel sistema non si produrranno più gradienti termici e quindi non ci saranno più flussi di energia: il sistema si manterrà stabile nel suo stato di equilibrio.

E' possibile con il software Geogebra (si veda in merito l'animazione online [#qui](#)) e grazie a una teoria matematica molto complessa – l'analisi differenziale delle equazioni alle derivate parziali – mostrare questo transitorio. Di seguito ci sono tre immagini di approccio all'equilibrio.



- In base alla *teoria cinetica* l'entropia di un *gas perfetto* molto rarefatto rimane definita anche in situazioni di non-equilibrio che *non* soddisfano le ipotesi di equilibrio locale per ogni volumetto in cui è suddiviso il sistema. Questo fatto può essere utile per studiare l'approccio all'equilibrio di un gas che presenta zone interne con temperature differenti. Si dovrebbe comunque abbandonare la situazione di stato stazionario e ciò va oltre gli scopi di questi appunti.
- In varie situazioni nello studio della freccia del tempo emerge la necessità di poter preparare stati iniziali di non-equilibrio, affinché l'evoluzione nel tempo di un sistema fisico sia irreversibile. In questo contesto risulta chiaro che la possibilità di preparare gradienti termici non nulli ai capi di un conduttore è elemento essenziale per la costruzione delle freccie del tempo. Ci sarebbe la possibilità di evitare il vincolo della preparazione degli stati iniziali grazie agli studi di Schulman delle condizioni al contorno a due tempi, ma non affronteremo qui questo argomento.
- La termodinamica si può aprire a chimica e biologia con lo studio dei flussi di materia, delle reazioni chimiche e delle strutture dissipative.