RICERCHE

2/1/'17 Ⓐ

TEORIA CINETICA: RETICOLO di BOLTZMANN (ISOTERMO)

(LATTICE BOLTZMANN METHOD)

modello microscopico/macroscopico
[costoso e non necessario] ⇓ [EQ. NAVIER STOKES già troppo HIGH LEVEL]
MESOSCOPICO

un FLUIDO (POCO COMPRIMIBILE) è un insieme di particelle; usiamo concetti statistici per ridurre i dettagli

$f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ — FUNZIONE di DISTRIBUZIONE di SINGOLA PARTICELLA

$\vec{x}$: POSIZIONE del VOLUMETTO; $\vec{v}$: VELOCITÀ; t: TEMPO

equazione di BOLTZMANN

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} f_i = C_i[f]}$$

$i = 0, \dots, N$ ← QUANTIZZAZIONE delle VELOCITÀ

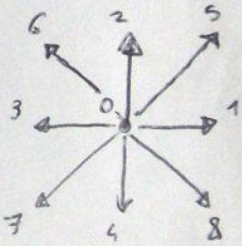
- $\frac{\partial f_i}{\partial t}$: come varia nel tempo
- $\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} f_i$: le particelle si possono spostare nel volume
- $C_i[f]$: operatore di collisione tra 2 particelle

POSTE ALL'INIZIO, per COSTRUIRLA (VEDI BOLTZMANN 1872)

L'IPOTESI DI CAOS MOLECOLARE (due molecole che collidono non erano correlate tra loro un attimo fa) (e così ∀ ...)

MODELLO 2D con 9 VELOCITÀ

"d2q9"



ABBIAMO N_0, N_1, N_2, ⋮, N_8 (IN OGNI NODO)

EQUILIBRIO LOCALE:

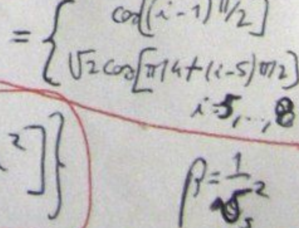
ANNULLA $C_i[f]$ $\forall i$ e IN OGNI NODO del RETICOLO;

- RILASSAMENTO ALL'EQUILIBRIO AD OGNI NODO

$$f \rightarrow f^{eq}(\rho, \vec{u})$$

PERMETTE di CONSERVARE MASSA, QUANTITÀ di MOTO e ENERGIA: È LA DISTRIBUZIONE DI MAXWELL-BOLTZMANN (LOCALE)

$$f_i^{eq} = \frac{\rho}{2\pi RT} e^{-(\vec{v}-\vec{u})^2/2RT}$$



APPROX BGK

BHATNAGAR GROSS KROOK

SINGOLO TEMPO τ DI RILASSAMENTO

$$C[f] = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{eq}\right)$$

espandiamo al 2° ORDINE f_i^{eq} in "d2q9" ⇒

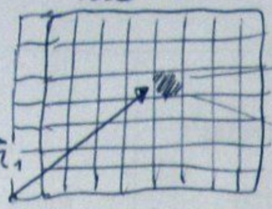
$$\boxed{f_i^{eq} = \rho \underbrace{w_i}_{\text{PESI}} \left\{1 + \beta \vec{v}_i \cdot \vec{u} + \frac{\beta^2}{2}\left[(\vec{v}_i \cdot \vec{u})^2 - u^2\right]\right\}}$$

$$v_i = \begin{cases} \cos[(i-1)\pi/2] & i = 0, \dots, 4 \\ \sqrt{2}\cos[\pi/4 + (i-5)\pi/2] & i = 5, \dots, 8 \end{cases}$$

$\beta = \frac{1}{v_s^2}$ → velocità del suono $1/\sqrt{3}$

regole { INTERPR. PROB., ISOTROPIA, INVARIANZA GALILEIANA } ⇒ $\frac{4}{9}$ se $i=0$; $\frac{1}{9}$ se $i = 1,2,3,4$; $\frac{1}{36}$ altrove

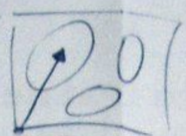
POSIZIONE MACROSCOPICA della CELLA



$\vec{r}_1$

$\vec{r}_1 = \varepsilon \vec{r}$

POSIZIONE NELLA cella



$\vec{r} - \vec{r}_1$

SCALE TEMPORALI

$$\begin{cases} t_1 = \varepsilon t \\ t_2 = \varepsilon t^2 \end{cases}$$

VARIAZIONI $\partial_\alpha = \varepsilon \partial_\alpha^{(1)}$

$$\partial_t = \varepsilon \partial_t^{(1)} + \varepsilon^2 \partial_t^{(2)}$$

DISTRIBUZIONE $\Rightarrow f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)}$

OSSERVABILI:

$\rho = \sum_i w_i f_i$; $\vec{J} = \sum_i w_i f_i \vec{v}_i$

densità (locale) di particelle — flusso di ...

NB $T = \dfrac{m v_s^2}{K_B}$ [sempre costante]

NB numero di Mach basso $Ma^2 = \dfrac{v^2}{v_s^2} << 1$

~~GAS~~ FLUIDO POCO COMPRIMIBILE

OSS: $v_s^2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$

COSA SUCCEDE IN UN PASSO Δt?

STREAMING ① f_i si sposta da un nodo ad un altro (o rimane lì)

[PRIMI VICINI] e [VICINI dei PRIMI VICINI]

lati (punti medi) — diagonale (vertici)

COLLISION ② f_i cambia, in un certo nodo

equazione DISCRETIZZATA

$$\underbrace{f_i(\vec{r} + \vec{v}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\vec{r}, t)}_{\text{STREAMING}} + \overbrace{\frac{\Delta t}{\tau}\left[f_i^{eq} - f_i(\vec{r}, t)\right]}^{\text{COLLISION}}$$

$\downarrow$

$f_i^{eq}(\vec{r}, t)$

$\Rightarrow$ DOBBIAMO COMPUTARE ad ogni passo ... ad ogni nodo

usando analisi di CHAPMAN-ENSKOG

MODIFICO

$$\vec{J} = \sum_i w_i f_i \vec{v}_i + \vec{F}\frac{\Delta t}{2}$$

e ho VISCOSITÀ CINEMATICA (dipende da τ)

$$\nu = \left(\frac{\tau}{\Delta t} - \frac{1}{2}\right) v_s^2 \Delta t$$

$\Downarrow$

$$\tau = \Delta t \Rightarrow \nu = \frac{1}{6}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

CICLO TEMPORALE

CICLO SUI NODI $\vec{r}$

CICLO SULLE VELOCITÀ $\vec{v}_i$

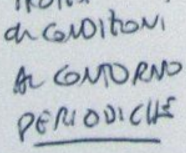
PRIMA... ① PRENDO $f_i(\vec{r}, t)$ e CALCOLO $f_i(\vec{r} + \vec{v}_i \Delta t, t + \Delta t)$

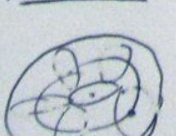
$\vec{r}$ $\vec{v}_i$

POI ② PRENDO QUEST'ULTIMA E, AD OGNI NODO, MESCOLO LE POPOLAZIONI per RIDISTRIBUIRLE

③ $\Rightarrow$ CALCOLO le OSSERVABILI prima di passare all'altro nodo

IPOTESI di CONDIZIONI AL CONTORNO: PERIODICHE





e mostro in modo grafico (colorando la ρ ad esempio)

$\rho(\vec{r}_i, t)$